ALGEBRA M1 – Lista 4

Przestrzenie liniowe

Zad.1. Wykazać, że zbiór ciągów rzeczywistych (zespolonych) (a_n) z naturalnymi działaniami dodawania $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$ i mnożenia przez liczby rzeczywiste (zespolone) $\alpha(a_n) = (\alpha a_n)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ (nad ciałem $\mathbb{C}$).

Zad.2. Sprawdzić, czy podane podzbiory przestrzeni liniowej ciągów rzeczywistych (zespolonych) z zadania 1 są jej podprzestrzeniami:

(a) zbiór ciągów o skończonej liczbie niezerujących sie wyrazów,

(b) zbiór ciągów o skończonej liczbie zerujących się wyrazów,

(c) zbiór ciągów zbieżnych,

(d) zbiór ciągów rozbieżnych,

(e) zbiór ciągów zbieżnych do zera,

(f) zbiór ciągów rozbieżnych do nieskończoności,

(g) zbiór ciągów ograniczonych.

Zad.3. Wykazać, że zbiór wielomianów $\mathbb{K}[x]$ nad ciałem $\mathbb{K}$ z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia przez elementy z ciała $\mathbb{K}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.

Zad.4. Sprawdzić, czy następujące podzbiory przestrzeni liniowej wielomianów $\mathbb{K}[x]$ są jej podprzestrzeniami, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$:

(a) zbiór wielomianów $\mathbb{K}_n[x]$ stopnia $\leq n$,

(b) zbiór wielomianów, które w punkcie $x = 1$ przyjmują wartość 1,

(c) zbiór wielomianów postaci $w(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, dla których $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$,

(d) zbiór wielomianów postaci $w(x) = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_{2k}x^{2k}$, gdzie k przebiega zbiór liczb naturalnych,

(e) zbiór wielomianów, które mają jako pierwiastek ustaloną liczbę $a \in \mathbb{R}$.

Zad.5. Sprawdzić, czy podane podzbiory przestrzeni liniowej $V = \mathbb{R}^2$ są jej podprzestrzeniami:

(a) $W = \{(x, y) : xy = 0\}$,

(b) $W = \{(x, y) : x + y = 0\}$,

(c) $W = \{(x, y) : ax + by = c\}$, gdzie a, b, c – ustalone liczby rzeczywiste,

(d) $W = \{(x, y) : xy \geq 0\}$.

Zad.6. Sprawdzić, czy podane podzbiory przestrzeni liniowej $V = \mathbb{R}^4$ są jej podprzestrzeniami:

(a) $W = \{(t, t+1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$,

(b) $W = \{(t, t+1, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $W = \{(t, s, t-s, t+s) : t, s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $W = \{t(1,1,0,0) + s(0,0,1,1) + r(1,1,1,1) : t, s, r \in \mathbb{R}\}$.

Zad.7. Uzasadnić, że

(a) punkty należące do prostej l w $\mathbb{R}^3$ tworzą podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy gdy prosta ta przechodzi przez początek układu współrzędnych,

(b) punkty należące do płaszczyzny π w $\mathbb{R}^3$ tworzą podprzestrzeń przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy płaszczyzna ta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Zad.8. Uzasadnić, że każda podprzestrzeń W przestrzeni liniowej V na ciałem $\mathbb{K}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ z działaniami dodawania i mnożenia przez elementy z ciała $\mathbb{K}$ odziedziczonymi z V.

Zad.9. Niech U, W będą podprzestrzeniami tej samej przestrzeni liniowej V. Sprawdzić, czy podane zbiory są także podprzestrzeniami liniowymi tej przestrzeni:

(a) $W \cap U$,

(b) $W \cup U$,

(c) $V \setminus W$.

Zad.10. Wyznaczyć domknięcia liniowe podanych zbiorów wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i podać ich interpretację geometryczną:

(a) $A = \{(1,1,0)\}$,

(b) $B = \{(1,1,0), (1,-1,0)\}$,

(c) $C = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$.

Zad.11. Wykazać własności domknięć liniowych:

(a) $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}A) = \mathrm{Lin}A$,

(b) $\mathrm{Lin}A \cup \mathrm{Lin}B \subseteq \mathrm{Lin}(A \cup B)$,

(c) $\mathrm{Lin}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Lin}A \cap \mathrm{Lin}B$,

gdzie A, B są zbiorami wektorów z przestrzeni liniowej V. W punkcie (c) podać przykład zbiorów, dla których zachodzi równość, oraz przykład zbiorów, dla których równość nie zachodzi.

Romuald Lenczewski